

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika Instituut

Andres Põldaru

**SKALAARSE TUMEAINNE TEKE SKAALAINVARIANTSETES
MUDELITES**

Bakalaureusetöö (Füüsika, 12 EAP)

Juhendajad:
Hardi Veermäe
Laur Järv

Tartu 2017

Skalaarse tumeaine teke skaalainvariantsetes mudelites

Töös uurime skalaarse tumeaine teket skaalainvariantsetes mudelites, täpsemalt ühe skalaarväljaga klassikaliselt skaalainvariantsetes mitte minimaalselt seotud skalaar-tensor teoorias. Skaalainvariantsus rikutakse kvantefektide tõttu tekkiva seosekonstantide jooksmisega. Vaadeldav mudel võimaldab kirjeldada nii tumeenergiat, milleks on skalaarvälja tasakaalupunktis olev energia, kui ka tumeainet, millele vastavad skalaarvälja võnkumised ümber tasakaalupunkti. Nende võnkumiste allikaks on tavalise nähtava aine energiatihedus. Töös hinnatakse, kui palju tumeainet antud mudeli raames varajases kiirgusdominantsetes universumis on võimalik tekitada. See on ühtlasi selle töö uuenduslik osa. Leiame, et madalatel temperatuuridel tekib väga väike hulk tumeainet võrreldes tänapäeva universumis mõõdetud tumeaine kogusega. Kõrgematel temperatuuridel on sel viisil tumeainet võimalik rohkem tekitada. Temperatuuril $T \approx 100\text{MeV}$, kui universumis domineeris osake-antiosake plasma, on võimalik tekitada skalaarvälja võnkumistena kogu tänapäeval nähtav tumeaine.

Märksõnad: tumeaine, tumeenergia, skalaar-tensor teooria, skaalainvariantsus, kosmoloogia.

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Scalar dark matter production in scale invariant models

We study the production of scalar dark matter in scale invariant models, specifically in a classically scale invariant non-minimally coupled scalar-tensor model with one scalar field. The scale invariance is broken by quantum effects causing the running of coupling constants. The model can describe dark energy, which is the potential energy of the scalar field at the stable point, and dark matter, which is represented by the oscillations of the scalar field around the stable point. The oscillations are sourced by the energy density of ordinary visible matter. In this work the amount of dark matter that can be produced in this model in an early radiation dominated universe. That is the novel part of this work. We find that at low temperatures a very small amount of dark matter is produced compared to the currently measured dark matter content of the Universe. At higher temperatures, more dark matter can be produced using this method. At temperatures of around $T \approx 100\text{MeV}$, when the universe was dominated by a particle-antiparticle pair plasma, all the currently observable dark matter can be produced.

Keywords: dark matter, dark energy, scalar-tensor theory, scale invariance, cosmology.

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Teoreetiline taust	8
1.1 Üldrelatiivsusteooria	9
1.2 Friedmanni universum	10
1.3 Skalaar-tensor teooriad	12
1.3.1 Inflatsioon	13
1.3.2 Mitteminimaalne seos ja raamide vahetus	14
1.4 Skaalainvariantsus	15
1.4.1 β -funktsioonid	17
2 Skalaarse tumeaine teke	19
2.1 Lineaarne lähend	21
2.2 Madala temperatuuri juht	23
2.2.1 Mudeli parameetrite määramine	27
2.3 Kõrge temperatuuri juht	28
2.4 Relativistlike massiivsete osakeste panus	30
3 Kokkuvõte	33
Tänuavaldused	35
Kirjandus	36
Lihtlitsents	39

Sissejuhatus

Tänapäeva kosmoloogia põhineb Albert Einsteini poolt 1915. aastal rajatud üldrelatiivsusteoorial [1]. Üldrelatiivsusteooria abil on võimalik universumit adekvaatsemalt kirjeldada, kui Newtoni seaduste abil. Kosmoloogia alguseks võib pidada Einsteini 1917. aasta artiklit [2], kus ta arutles kosmoloogia üle üldrelatiivsusteooria raamides. Täpsemalt uuris ta staatilist universumit ja leidis, et staatilise universumi võimaldamiseks on vaja kosmoloogilist konstanti, vastasel korral gravitatsioonijõud tõmbab universumi kokku. Vihje selle kohta, et universum ei ole staatiline, andis 1922. aastal avaldatud artikkel, kus 14 mõõdetud galaktikate keskmine maast eemaldumise kiirus oli sadu kilomeetreid sekundis [3]. Aastal 1922. uuris Alexander Friedmann mittestaatilisi universe [4]. Tema tuletatud Friedmanni võrrandid leiavad tänapäeval rohket kasutust universumi arengu kirjeldamisel. Friedmanni võrrandites eeldatakse, et universum on homogeenne ja isotroopne, aga aine energiatihedused ja rõhud võivad ajas muutuda. Friedmanni võrrandid lubavad ka näiteks eksponentsiaalselt paisuvat universumi ja universumi, mis teatud hetkeni paisub ja seejärel tõmbub kokku. Paisuva universumi mudelit kinnitasid Hubble 1929. avaldatud tulemused, mille järgi kauged galaktikad liiguvad maast eemale üldjoontes seda kiiremini, mida kaugemal nad on, kusjuures maast eemale liikumise kiirus sõltub kaugusest Hubble konstandi järgi $v = Hr$ [5]. Kuigi ta sai suurusjärgu võrra vale tulemuse, oli tema tähelepanek õige, et igas suunas vaadates liiguvad kauged galaktikad meist eemale ja mida kaugemal nad on seda kiiremini nad liiguvad. Paisuvat universumi on kinnitanud ka hilisemad supernoovade vaatlused [6], kusjuures nende mõõtmiste järgi on paisumine kiirenev ja universumi vanus ligikaudu 14 miljardit aastat. Paisuv ja homogeenne universum viitab suurele paugule, kuna üldrelatiivsusteooria (konkreetselt Friedmanni võrrandite) abil leiame, et ajas tagasi liikudes oli kogu universum kokku surutud järjest väiksemasse ruumipiirkonda.

Suure paugu teooriat kinnitab 1964. aastal avastatud kosmiline taustkiirgus [7]. Varajasem universum oli kokku surutud ja kõrgel temperatuuril, seega kiirgas elektromagnetkiirgust. Vaatlused kinnitavad, et see reliktkiirgus on väga lähedane musta keha kiirgusele, seega oli varajane universum termodünaamilises tasakaalus ja talle saab rakendada termodünaamika ja statistilise füüsika seadusi. Kõrgetel temperatuuridel üle 3000 K oli kogu aine ioniseeritud

plasma kujul ja seega vabade elektronide tõttu elektromagnetkiirgusele läbipaistmatu. Jahtudes tekkisid põhiliselt vesiniku ja heeliumi aatomid ja universum muutus läbipaistvaks. Tänapäeval on näha seda sama elektromagnetkiirgust, mis universumi jahtudes sai hakata vabalt levima ja täitis nüüd ning täidab praegugi kogu universumi. Kosmiline reliktkiirgus on väga isotroopne, aga mõõtes väikeseid häiritusi on võimalik kindlaks teha, et universum on lame, lisaks on võimalik määrata aine ja tumeenergia kogused. Plancki satelliidi andmete järgi moodustab universumi kogu energiatihedusest 31% aine ja 69% tumeenergia, samas barüonainet (prootonitest ja neutronitest koosnevat ainet) on ainult 4,9% [8]. Tumeenergiaks kutsutakse Friedmanni võrrandites teatavat liiget, mis põhjustab universumi paisumist. Tumeaineks kutsutakse seda energiatiheduse osa, mis paisumisel käitub gravitatsiooniliselt nagu tavaline aine, aga mis kosmilise reliktkiirguse mõõtmiste järgi ei ole barüonaine, vaid hoopis mingi senitundmatu aine. Lisaks on võimalik tuvastada tumeaine olemasolu jälgides tähtede orbiite galaktikates [9]. Vaatlused näitavad, et galaktikate nähtav mass ei ole piisavalt suur, et hoida tähti nende orbiitidel ja seega peab seal olema lisaks tumeaine, mis tekitab tähtede orbiidil hoidmiseks vajaliku gravitatsioonijõu. Vaadeldes galaktikaparvede kokkupõrkeid on nähtud, kuidas tavaline aine interakteerub kokkupõrkel, aga tumeaine liigub edasi ja ei interakteeru (või interakteerub väga nõrgalt) ei tavalise aine ega teise galaktika parve tumeainega [10].

Tumeaine kohta on teada, et ta ei ole barüonainega elektromagnetilises vastastikmõjus, aga interakteerub tavalise ainega gravitatsiooniliselt. Tumeaine võib olla iseendaga vastastikmõjus, aga see vastastikmõju ei saa olla väga tugev. On olemas piirangud tumeaine osakeste massile (järgnev piirang eeldab, et tumeaine on universumiga termodünaamilises tasakaalus, see eeldus kõikides mudelites ei kehti, näiteks aksionide korral). Mida väiksem on tumeaine osakese mass, seda suurem on tema kiirus sama temperatuuri juures ja seda rohkem jõuab tumeaine jaotus ühtlustada. Kui tumeaine mass oleks väga väike ($< 2\text{ keV}$), siis oleks tumeaine jaotus nii ühtlane, et ei lubaks arvestades universumi vanust tekkida praegu nähtaval universumi struktuuril, kus aine on ebaühtlaselt jaotunud [11]. Arvestades, et tumeaine ei ole barüonaine, siis hetkel on olemas teooriaid, et tumeaine koosneb mõnedest seni avastamata nõrgalt interakteeruvatest massiivsetest osakestest (WIMP), või skalaarväljast (aksionidest või mõne muu skalaarvälja võnkumistest). Kõik need variandid on hetkel oletuslikud ja vajavad edasist uurimist. [12]

Käesoleva töös uurime tumeaine klassikaliselt skaalainvariantset skalaarvälja mudelit [13–16], täpsemalt seda, kuidas ja kui palju tumeainet saab selle mudeli järgi tekkida. Tavalist üldrelatiivsusteooriat laiendades lisame juurde skalaarvälja ja muudame Plancki massi dünaamiliseks, sõltuvaks skalaarväljast. Uurides selle skalaarvälja käitumist tuleb välja, et jaotades ta konstantseks ja ostsileeruvateks komponentideks, saab nende abil kirjeldada vastavalt tumeenergiat ehk kosmoloogilist konstanti ja tumeainet. Välja võnkumised tekitavad

energiatiheduse, mis interakteerub tavalise ainega gravitatsiooniliselt ja see energiatihedus skaleerub universumi paisudes nagu tavaline aine, seega neid kahte aspekti arvestades sobib antud teooria kirjeldama tumeainet. Antud teoorial on lisaks omadus, et skalaarvälja ostsillatsioonid tekivad spontaanselt, võimaldades seega tumeaine spontaanse tekkimise. Teadaolevalt ei ole varasemalt tumeaine spontaanse teket skalaarvälja ostsillatsioonidena uuritud, aga üldisemalt tumeaine skalaarvälja mudelit küll varem toodud viidetes.

Selles mudelis tekitatakse Plancki mass (sisuliselt gravitatsioonikonstant) dünaamiliselt. Seetõttu kaob võrranditest ära üks dimensionaalne konstant, mis skaalainvariantsust rikub ja nii tehes on võimalik saada teooria, mis on klassikaliselt skaalainvariantne. Märgin ära, et osakeste standardmudel on klassikaliselt peaaegu skaalainvariantne, seda on võimalik teha skaalainvariantseks lisades mudelile teatud skalaarväljasid ja et skaalainvariantsus oleks üks lahendus standardmudeli hierarhia probleemile [17]. Seetõttu on skaalainvariantsus huvipakkuv teema.

Vaadeldav mudel on skalaar-tensor teooria [18]. Üheks levinud skalaar-tensor teooria rakenduseks on inflatsiooni mudel, kus inflatsiooni tekitab skalaarväli, millel on analoogne mõju paisumisele nagu kosmoloogilisel konstandil [19]. Skalaar-tensor teooriates on tumeainet skalaarvälja võnkumistena varem uuritud [15, 16]. On teada, et mitte kõigi, aga teatud skalaarvälja potentsiaalide korral käitub universumi paisudes skalaarvälja võnkumiste energiatihedus nagu külma aine energiatihedus [16]. Et saada õige kogus tumeainet, tuleb üldjuhul skalaarvälja algväärtus täpselt paika seada, aga on leitud, et osade potentsiaalide korral tumeaine energiatihedus omandab tänapäeval mõõdetud väärtuse suure vahemiku algtingimuste korral [16]. See lahendab peenhäälestuse probleemi ja ei teki küsimust, miks mõõdetavad parameetrid just sellised on. Parameetrite peenhäälestus ei ole nii veenev, kui sama tulemuse saavutamine paljude algtingimuste korral. Käesolevas töös näeme, et tumeaine tekkimiseks peame parameetreid sobitama hakkama ja peenhäälestuse probleem jääb alles. Veel on uuritud, kuidas Plancki mass mitteminimaalse seose korral ajas muutub [15]. Mitteminimaalne seos tähendab antud töö kontekstis seda, et üldrelatiivsusteoorias olev Plancki mass sõltub skalaarväljast ja on seega dünaamiline. On uuritud mudeleid, kus inflatsiooni ja tumeenergiat tekitab üks ja sama skalaarväli [20] ja ka näiteks mitteminimaalse seosega inflatsiooni mudeleid [14].

Antud töö esimeses peatükis tutvustame teoreetilist tausta. Teises peatükis kirjeldame uuritavat mudelit ja seejärel alapeatükis (2.1) algab originaalne arvutuskäik, kus hakkame uurima võnkumiste tekkimist selle mudeli raames. Nagu varem mainitud, siis teadaolevalt ei ole skalaarse tumeaine kogust selliselt varem uuritud ja saadud tulemusi varem kusagil avaldatud pole. Uuritava mudeli raames tekitab skalaarvälja võnkumisi nähtav aine ja see võib teatud juhtudel tekitada kogu tumeaine, mida me universumis näeme. Me uurime võrrandeid lineaarses

lähenduses, käsitledes eraldi madala ja kõrge temperatuuri juhtu. Seejärel analüüsime tumeaine teket relativistliku osake-antiosake plasma toimel. Töö lõppeb kokkuvõttega.

Peatükk 1

Teoreetiline taust

Käesolevas töös kasutame loomulikke ühikuid, kus $k = 1$, $\hbar = 1$ ja $c = 1$. Seetõttu on mass, energia, temperatuur, pikkus ja aeg kõik avaldatavad ühtede ja samade ühikute kaudu, milleks valin eV või GeV. Näiteks kehtivad

$$1 \text{ m} \rightarrow \frac{1 \text{ m}}{\hbar c} = 5,1 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1}, \quad (1.1)$$

$$1 \text{ s} \rightarrow \frac{1 \text{ s}}{\hbar} = 1,5 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1}, \quad (1.2)$$

$$1 \text{ kg} \rightarrow 1 \text{ kg} \cdot c^2 = 5,6 \cdot 10^{26} \text{ GeV}, \quad (1.3)$$

$$1 \text{ K} \rightarrow 1 \text{ K} \cdot k_B = 8,6 \cdot 10^{-14} \text{ GeV}, \quad (1.4)$$

$$1 \text{ J} = 6,2 \cdot 10^9 \text{ GeV}. \quad (1.5)$$

Gravitatsioonikonstandi asemel kasutame (taandatud) Plancki massi, mis on avaldatav gravitatsioonikonstandi kaudu

$$M_P = \sqrt{\frac{c^4}{8\pi G}} = 4,3 \cdot 10^{-9} \text{ kg} = 2,4 \cdot 10^{18} \text{ GeV}. \quad (1.6)$$

See Plancki massi väärtus on arvutatud kasutades gravitatsioonikonstandi tänapäevast väärtust. Hiljem vaatan mudelit, kus Plancki mass muutub. See vastab gravitatsioonikonstandi muutumisele, teised konstandid loeme kogu aeg konstantseteks.

1.1 Üldrelatiivsusteooria

See peatükk põhineb valdavalt raamatul [21]. Üldrelatiivsusteooria üks põhilistest suurustest on meetrika $g_{\mu\nu}$. Meetrika on tensor (antud juhul meie jaoks 4x4 maatriks), mis määrab ära aegruumis kahe punkti vahelise kauguse

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \left(= \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right), \quad (1.7)$$

kus kasutame summerimiskonventsiooni, mille järgi üle korduvate indeksite summeeritakse. Tasases ruumis $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ja saame tavalisest erirelatiivsusteooriast tuttava pikkuselemendi avaldise. See pikkuselement on invariantne ehk ei sõltu koordinaatidest, mida kasutame. Meetrika paneb paika aegruumi geomeetria, üldjuhul võib aegruum olla kõverdunud. Lisaks määrab meetrika ära, kuidas vabad osakesed liiguvad (mitte vabade osakeste korral tuleb arvestada osakestele mõjuvaid jõudusid). Kõverat ruumi ei saa paratamatult ristkoordinaadistikuga katta ja peame kasutama kõveraid koordinaate. Kõverdunud koordinaatide korral vektorite ja muude suuruste tuletisi arvutades tuleb arvestada, et vektorite komponendid muutuvad ka koordinaatide kõveruse tõttu. Kuna tahame leida koordinaatidest sõltumatuid suurusi, siis tuletise võtmisel selle muutuse maha arvestamiseks kasutatakse kovariantset tuletist

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma, \quad (1.8)$$

kus

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (\partial_\mu g_{\sigma\alpha} + \partial_\sigma g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\sigma}). \quad (1.9)$$

Sellega oleme defineerinud kovariantse tuletise ∇_μ , mis arvestab vektorist tuletist võttes ainult vektori tegelikku muutust, mitte koordinaatidest tulevat muutust. Kui tasases ruumis vektoreid nihutada suvalist trajektoori pidi ja tuua vektor seejärel tagasi algpunkti, siis ta jääb alati algse vektoriga paralleelseks. Kõveras ruumis vektorit liigutades ja seejärel algpunkti tagasi tuues vektorid võivad muutuda (näiteks kui sfääril panna põhjapoolusele suvaline vektor, nihutada seda vektori sihis ekvaatorile, seejärel piki ekvaatorit teisele poole sfääri ja siis tagasi põhjapoolusele, leiame, et vektor on pööratud teistpidi võrreldes esialgsega). Nihutades vektorit V^α infinitesimaalselt ringiratast piki koordinaatide x^μ ja x^ν koordinaattelgi (vektorit nihutatakse mööda rööpkülikut, mille külgedeks on vastavad koordinaatteljed) saame leida tekkiva muutuse (ühikulise koordinaatide muutuse kohta)

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha = -R^\alpha_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \quad (1.10)$$

kus $R^\alpha_{\sigma\mu\nu}$ on Riemanni tensor, mis kirjeldab ruumi kõverust. Selle avaldise võib võtta Riemanni tensori definitsiooniks ja seega ta näitab, kas ja kui palju vektorid muutuvad ruumi kõveruse tõttu, kui neid mööda suletud trajektoori liigutada. Tasases ruumis on tema kõik komponendid nullid sõltumata koordinaatide valikust, $R^\alpha_{\sigma\mu\nu} = 0$. Riemanni tensori abil on defineeritud Ricci tensor

$$R^\alpha_\mu = R^\alpha_{\sigma\mu\nu} g^{\sigma\nu} \quad (1.11)$$

ja Ricci skalaar

$$R = R^\alpha_\alpha, \quad (1.12)$$

kus $g^{\sigma\nu}$ on meetrika pöördmaatriksi elemendid. Üldrelatiivsusteooria väljavõrrandid ehk Einsteini võrrand on teist järku mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteem meetrika jaoks

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{M_P^2}T_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

kus $T_{\mu\nu}$ on aine energia- ja impulsi tensor. Energia-impulsi tensoris on aine energia- ja impulsi tihedused, ning energia- ja impulsi voo tihedused. Näiteks punktosaese energia-impulsi tensor on

$$T_{\mu\nu} = mu_\mu u_\nu \delta(x - x(t)), \quad (1.14)$$

kus v_μ on osakese nelikiiruse komponendid. Deltafunktsioon tuleneb sellest, et vaatleme punktmassi ja punktmassi tihedusi kirjeldame deltafunktsiooni abil.

Üldrelatiivsusteooria võrrandid on võimalik tuletada vähima mõju printsiibi järgi mõjust

$$S = \int \left(\frac{1}{2} M_P^2 R \sqrt{-g} + \mathcal{L}_M \right) d^4x, \quad (1.15)$$

kus g on meetrika determinant, \mathcal{L}_M on ainet kirjeldav lagranžiaanitiheduse osa, mis annab võrrandis (1.13) oleva energia-impulsi tensori ja Ricci skalaar R annab võrrandi (1.13) vasaku poole. Sellest suhteliselt lihtsat mõjust on võimalik tuletada üldrelatiivsusteooria väljavõrrandid (1.13), kui vähima mõju printsiibi järgi varieerida meetrikat.

1.2 Friedmanni universum

Universumit vaadeldes paistab kehtivat kosmoloogiline printsiip, mille järgi on aine jaotus suurtel skaaladel homogeenne ja isotroopne. Homogeenset ja isotroopset ainet on võimalik kirjeldada ainult rõhu p ja energiatiheduse ρ abil. On võimalik näidata, et

homogeenses ja isotroopses universumis peab meetrika olema sfäärilistes koordinaatides Friedmanni–Lemaître’i–Robertsoni–Walker’i meetrika kujul

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right), \quad (1.16)$$

kus $a(t)$ on dimensioonitu universumi mastaabikordaja ja k määrab ära ruumi kõveruse. Võib mõelda, et $a(t)$ määrab universumi pikkuste skaala. Kui $a(t)$ muutub, siis kõik pikkused muutuvad sama kordaja võrra nagu a , sarnaselt nagu õhupalli paisudes kõik punktid õhupalli peal liiguvad teineteisest kaks korda kaugemale kui õhupall paisub kaks korda suuremaks. Selle meetrika abil on võimalik tuletada üldrelatiivsusteooria väljavõrranditest (1.13) Friedmanni võrrand ja pidevuse võrrand, mida saab kirja panna kujul

$$3M_P^2 H^2 = \rho - \frac{3M_P^2 k}{a^2}, \quad (1.17)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.18)$$

kus $H = \frac{\dot{a}}{a}$ on Hubble konstant, tänapäeval $H_0 = 67 \text{ (km/s)/Mpc}$ [8]¹. Nendes avaldistes on ρ ja p kogu materia energiatihedus ja rõhk. Jaotame need järgnevateks komponentideks: aine, kiirgus ja tumeenergia. Kehtivad järgnevad olekuvõrrandid rõhu jaoks: aine korral $p_A = 0$, kiirguse korral $p_R = \frac{1}{3}\rho_R$, tumeenergia korral $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Asendades need võrrandisse (1.18) saame

$$\rho_A(a) = \rho_{A,0}a^{-3}, \quad \rho_R(a) = \rho_{R,0}a^{-4}, \quad \rho_\Lambda(a) = \rho_{\Lambda,0}, \quad (1.19)$$

kus indeks 0 tähistab väärtusi ajahetkel, kui $a = 1$. Universumi paisudes kui a suureneb, siis materia ja kiirguse energiatihedused lähevad järjest väiksemaks. Tumeenergia energiatihedus on konstantne ja kiirguse energiatihedus kahaneb kiiremini, kui aine energiatihedus. Seega ajas tagasi liikudes muutub tumeenergia osakaal järjest tühisemaks ja kiirguse osakaal suureneb võrreldes aine osakaaluga. Temperatuur on pöördvõrdeline mastaabikordajaga

$$T(t_2) = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} T(t_1). \quad (1.20)$$

Friedmanni universumis tekib paisumise tõttu valguse punanihe

$$1 + z = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}, \quad (1.21)$$

kus $z = (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ on punanihe, t_2 on valguse lainepikkuse mõõtmise hetk ja t_1 on valguse

¹Mpc tähistab megaparsekit

kiirgamise hetk. Siit on näha, et mõõtes kaugete galaktikate punanihkeid on võimalik määrata mastaabikordaja erinevatel ajahetkedel ja võrreldes saadud tulemusi Friedmanni võrrandiga

$$3M_P^2 H^2 = \rho_{A,0} a^{-3} + \rho_{R,0} a^{-4} + \rho_{\Lambda,0} - 3M_P^2 k a^{-2} \quad (1.22)$$

on võimalik sobitamise teel määrata energiatihedused. Väga täpselt saab määrata tiheduse parameetrid kosmilise reliktkiirguse abil. Saadud tulemuste esitamisel ja ka üldisemalt kasutatakse tihti tiheduste asemel tiheduste suhet võrreldes kriitilise tihedusega $\rho_c = 3M_P^2 H^2$. Suhet tähistatakse tähega $\Omega = \rho/\rho_c$ Siis saame võrrandi (1.22) asemel võrrandi

$$1 = \Omega_A + \Omega_R + \Omega_\Lambda + \Omega_k. \quad (1.23)$$

Plancki satelliidi reliktkiirguse mõõtmised näitavad, et tänapäeval universum on ligikaudu lame $|\Omega_k| < 0.005$ [8] ja mateeria tihedusparameeter

$$\Omega_A = 0,316 \pm 0,014, \quad (1.24)$$

millest on tavalist ainet ja tumeainet vastavalt

$$\Omega_M = 0,049, \quad \Omega_{DM} = 0,265. \quad (1.25)$$

Kiirguse tihedusparameeter on väga väike võrreldes tumeenergia tihedusparameetriga

$$\Omega_R = 9,25 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_\Lambda = 0,684. \quad (1.26)$$

Kuna universum on ligikaudu lame, siis edaspidi jätan kõveruse tihedusparameetri Ω_k arvestamata.

1.3 Skalaar-tensor teooriad

Skalaar-tensor teooriate kohta leiab ülevaate raamatust [18]. Üldrelatiivsusteooria lagranžiaanitiheduses on väljaks meetrika, mis on tensor. Kui lisame lagranžiaanitihedusse skalaarväljasid, siis saame skalaar-tensor teooria, mis on modifitseeritud gravitatsiooni teooria. Käesolevas töös uurime mitteminimaalse seosega skalaar-tensor teooriat ja skalaarvälja käitumist selles teoorias. Enne mitteminimaalse seose juurde asumist tutvume kõigepealt lihtsama näitena minimaalse seosega teooriaga, vaadates üht selle rakendust.

1.3.1 Inflatsioon

Ühe skalaar-tensor teooria rakendusena tutvume inflatsiooniga [22]. Inflatsioon on hüpoteetiline kiire paisumise periood, mida saab modelleerida skalaar-tensor teooria abil. Inflatsioon toodi kosmoloogiasse sisse, et põhjendada, miks nähtav universum on lame, homogeenne ja miks on ühtlane temperatuur ruumipiirkondades, mis ei oleks inflatsiooni arvestamata kunagi saanud olla põhjuslikult seotud. Inflatsiooni on võimalik kirjeldada järgneva mõjuga teooria abil

$$S = \int \left(\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.27)$$

Lagranžiaanitiheidusse on lisatud skalaarvälja kineetilised ja potentsiaalsed liikmed. Sellise lagranžiaanitiheiduse kohta öeldakse, et skalaarväli on gravitatsiooniga minimaalselt seotud ehk skalaarväli on lisatud eraldi liidetavatena. Hetkel vaatame universumi väga varajaseid hetki, kus eeldame, et skalaarväli domineerib ja seega ülejäänud aine ja kiirgust ignoreerime. Eeldades, et universum on homogeenne, siis sellest lagranžiaanitiheidusest saab tuletada võrrandid, mis on analoogsed Friedmanni võrranditega (1.17) ja (1.18), kus skalaarvälja energiatihedus $\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V$ ja rõhk $p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V$. Hetkel ignoreerime ka kõveruse komponendi Friedmanni võrrandites (kui seda liiget mitte ignoreerida, siis leiaksime, et inflatsioon ajab kõveruse liikme väga väikeseks ja universumi ligikaudu lamedaks). Saame Friedmanni võrranditest

$$3M_P^2 H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V, \quad (1.28)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (1.29)$$

Oletame, et potentsiaal V on piisavalt lauge, et kehtib $V'/V = \epsilon/M_P$, kus $\epsilon \ll 1$ (tuntud kui slow-roll condition). Võrrandist (1.29) näeme, et $\dot{\phi}$ tasakaalupunkt on $\dot{\phi} = -V'/3H = -\epsilon V/(3M_P H)$. Tasakaalupunktis

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = \epsilon^2 V \frac{V}{6(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V)} \ll V. \quad (1.30)$$

Niisiis tingimus $\epsilon \ll 1$ tagab, et skalaarvälja ajaline tuletis läheb tasakaalupunktis nii väikeseks, et võime võrrandis (1.28) skalaarvälja ajalise tuletise liikme $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ ära jätta, sest see on teise liikmega V võrreldes väike. Jättes selle liikme ära saame

$$3M_P^2 H^2 = V \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{V}{3M_P^2}} \quad \rightarrow \quad a(t) = a(t_0) \exp \left(\sqrt{\frac{V}{3M_P^2}} (t - t_0) \right). \quad (1.31)$$

Näeme, et universum paisub eksponentsiaalselt. Selline paisumine kestab seni, kuni tingimus $\varepsilon \ll 1$ enam ei kehti. Mingil hetkel väli jõuab miinimumini, hakkab ümber miinimumpunkti võnkuma ja kannab enda energia üle ülejäänud universumile. Mida laugem potentsiaal valida, seda rohkem universum paisub. Kuna potentsiaali kuju ei ole millegi muuga määratud, välja tõime sisse just inflatsiooni tekitamiseks, siis saame ka valida vastava potentsiaali ja tekitada vaatlustega kooskõlas oleva inflatsioonilise paisumise.

Selles näites nägime, kuidas skalaarvälja potentsiaal paneb universumi paisuma ja käitub nagu kosmoloogiline konstant ehk tumeenergia. Hiljem meie poolt vaadatud mudelis tekitab ka skalaarväli tumeenergia.

1.3.2 Mitteminimaalne seos ja raamide vahetus

Kui lagranžiaanitiheduses Ricci skalaari ees olev kordaja sõltub skalaarväljast, siis on tegemist mitteminimaalse seosega. Käesolevas töös uurime skalaarse tumeaine teket just mitteminimaalse seosega mudelis, mille mõjufunktsionaal on kujuga

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \int \left(\frac{1}{2} \xi \phi^2 R - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.32)$$

kus ξ on dimensioonitu kordaja. Mitteminimaalse seose korral tekkivast skaalainvariantsusest räägime järgmises alapeatükis. Kui Plancki mass on dünaamiline, siis öeldakse, et tegemist on Jordani raamiga. Lisaks on olemas Einsteini raam, kus Plancki mass on konstantne, aga see-eest kineetilised liikmed ja energia-impulsi tensor tulevad teistsugused, kui Jordani raamis. Üleminek kahe raami vahel toimub muutes pikkusühikuid, ehk tehes asenduse $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2} g_{\mu\nu}$, kus raamide vahetamise jaoks valime Ω^{-2} sellise, mis muudab Plancki massi konstantseks. Lähemalt vaadates, kui teeme teisenduse $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, kus $\Omega^2 = \frac{\xi \phi^2}{M_P^2}$, siis saame uueks mõjuks [23]

$$S = \int \left(\frac{M_P^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \left(6 + \frac{1}{\xi} \right) \frac{M_P^2}{\phi^2} (\nabla_\alpha \phi)(\nabla^\alpha \phi) - \frac{M_P^4}{\xi^2 \phi^4} V(\phi) \right) \sqrt{-\tilde{g}} d^4x. \quad (1.33)$$

Näeme, et saadud mõjus mitteminimaalset seost enam ei ole, Plancki mass on konstantne M_P^2 . Kui teha asendus $\varphi = M_P \sqrt{6 + \frac{1}{\xi}} \ln \phi$, siis saab mõju viia kanoonilisele kujule

$$S = \int \left(\frac{M_P^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \varphi)(\nabla^\alpha \varphi) - \frac{M_P^4}{\xi^2 \phi(\varphi)^4} V(\phi(\varphi)) \right) \sqrt{-\tilde{g}} d^4x. \quad (1.34)$$

Saadud mõju tundub justkui lihtsam, sest nüüd on tegemist tavalise mitteminimaalse seosega, aga potentsiaali kuju on veidi teistsugune. Samas nüüd tuleb arvestada, et energia-impulsi tensor

muutub. Energia-impulsi tensor on defineeritud järgnevalt [24]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.35)$$

Seda definitsiooni kasutades saame leida energia-impulsi tensori mõlema raami meetrikat kasutades ja need omavahel siduda

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\Omega^4 \sqrt{-g}} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\Omega^2 \sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{M_P^2}{\xi \phi^2} T_{\mu\nu}. \quad (1.36)$$

Tulemusest näeme, et Einsteini raamis on hoopis energia-impulsi tensor mitteminimaalselt seotud skalaarväljaga. Võime mõelda, et välja potentsiaal sõltub efektiivselt materia energia-impulsi tensorist. Sisuliselt on tegemist muutujavahetusega, et kaotada ära mitteminimaalne seos. Võrreldes minimaalse seosega ei ole mitteminimaalne seos ei ole täiesti eraldiseisev mudel, vaid alternatiivselt võib seda vaadata kui skalaarvälja potentsiaali ja energia-impulsi tensori muutust. Meie teeme oma arvutused edaspidi Jordani raamis, aga käesoleva töö analüüsi oleks huvitav läbi viia ka Einsteini raamis, sest kahes raamis on osade füüsikaliste suuruste tõlgendused erinevad. Näiteks kui Jordani raamis liiguvad osakesed mööda geodeetilisi jooni, siis Einsteini raami üle minnes enam mitte [25].

1.4 Skaalainvariantsus

Skaalainvariantsuse all mõtleme seda, kui skaalateisenduse all mõjufunktsionaal jääb samale kujule $S' = S$. Sellisel juhul tulevad mõjust tuletatud liikumisvõrrandid samad. See tähendab, et kui nihutada kõiki punkte teineteisest mingi kordaja võrra kaugemale ja ka välju vastava kordajaga skaleerida, siis süsteem käitub täpselt samamoodi nagu enne. Nagu varsti näeme, siis kui mõjus puuduvad dimensiooniga konstandid, mis fikseerivad mingi skaala, on teooria skaalainvariantne.

Ignoreerides hetkeks materia osa, lisame üldrelatiivsusteooria lagranžiaanitihedusele skalaarvälja ϕ . Nagu lagranžiaanitiheduse koostamisel on standartne, lisame skalaarvälja kineetilised ja potentsiaalsed liikmed ja saame mõjuks

$$S = \int \left(\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.37)$$

Paneme tähele, et loomulikes ühikutes on mõju ühikuta, seega lagranžiaanitihedus on ühikutes $[M^4]$, väli ϕ on ühikutes $[M]$ ja Ricci skalaar R on ühikutes $[M^2]$. Hetkel on

lagranžiaanitiheduses sees üks massiühikuga kordaja M_P ja varsti näeme, et see konstant rikub teooria skaalainvariantust.

Skaalateisenduse all mõtleme teisendust, kus kõiki ruumipunkte nihutame konstantse kordaja Ω võrra üksteisest kaugemale. See tähendab, et teeme asendused

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2} g_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} \rightarrow \Omega^{-4} \sqrt{-g}. \quad (1.38)$$

Paneme tähele, et seostuse kordajad (1.9) ei muutu sellise skaleerimise käigus. Riemanni tensor (1.10) on avaldatav seose kordajate kaudu, seega ka tema ei muutu skaleerimise käigus. Kuna $R = R^\alpha{}_{\sigma\alpha\nu} g^{\sigma\nu}$, siis saame $R \rightarrow \Omega^2 R$. Välja teisenemise skaalateisenduse all saame leida tingimusest, et kineetiline liige oleks enne ja pärast teisenemist sama kujuga. Oletades, et väli teiseneb nagu $\phi \rightarrow \Omega^w \phi$, siis kineetiline liige teiseneb nagu

$$g^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) \sqrt{-g} \rightarrow \Omega^{-2+2w} g^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) \sqrt{-g}. \quad (1.39)$$

Kuna skaalainvariantsuse jaoks peavad avaldised pärast teisenemist jääma samaks, siis $w = 1$. Potentsiaali liige teiseneb nagu

$$V(\phi) \sqrt{-g} \rightarrow \Omega^{-4} V(\Omega\phi) \sqrt{-g}. \quad (1.40)$$

Sellest järeldame, et $V(\Omega\phi) = \Omega^4 V(\phi)$ ja järelikult peab kehtima

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (1.41)$$

kus λ on mingi dimensioonitu konstant. Edasi vaatame Ricci skalaariga liikme teisenemist

$$\frac{1}{2} M_P^2 R \sqrt{-g} \rightarrow \Omega^{-2} \frac{1}{2} M_P^2 R \sqrt{-g}. \quad (1.42)$$

See liige ei jäänud samaks peale skaalateisendust, aga seda on võimalik teha skaalainvariantseks, kui konstantse Plancki massi asemel võtame dünaamilise Plancki massi $M_P^2 = \xi \phi^2$, kus ξ on dimensioonitu konstant. Siis saame

$$\frac{1}{2} \xi \phi^2 R \sqrt{-g} \rightarrow \frac{1}{2} \xi \phi^2 R \sqrt{-g} \quad (1.43)$$

ja lagranžiaanitihedus tervikuna on skaalainvariantne ehk jäi täpselt samale kujule $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Kuigi lagranžiaanitihedus on samal kujul, siis uues lagranžiaanitiheduses väljad ja meetrika ei ole võrdsed esialgsete väljade ja meetrikaga, sest skaleerisime neid ja nüüd need vastavad skaleeritud universumile. Lõppkokkuvõttes paneme tähele,

et skaalainvariantsuse jaoks pidime ära kaotama massidimensiooniga konstandi M_P ja ka potentsiaali avaldis tuli selline, et seal ei ole massidimensiooniga konstante. Skaalateisendus muutis meetrikat ja välju nii, et iga liidetav sai teguri Ω vastavalt teguri massidimensioonile ja sisuliselt vastab see massiühikute teisendusele. See tähelepanek kehtib klassikalistes teooriates üldisemalt, kui lagranžiaanitiheiduses ei ole massidimensiooniga konstante, siis iga liidetava ühikud $[M^4]$ tulevad väljadest (meetrika on küll dimensioonita, aga ta ilmub koos koordinaatidega, näiteks $g^{\mu\nu}(\partial_\mu)(\partial_\nu)$ või $\sqrt{-g}d^4x$, ja seon koordinaatide dimensioonid meetrikaga). Kuna mõjufunktsionaal oli ühikuta, siis välju teisendades vastavalt massiühikutele jääb mõjufunktsionaal samaks, sest teisendus vastab ühikute valikule. Seega kui lagranžiaanitiheiduses on kõik kordajad dimensioonitud, siis teooria on skaalainvariantne, aga dimensiooniga konstandid rikuvad skaalainvariantsust.

Teine oluline tähelepanek skaalainvariantsuse kohta on, et kui mateeria mõjufunktsionaal $S = \int \mathcal{L}_M d^4x$ on skaalainvariantne, siis sellest mõjufunktsionaalist saadud energia-impulsi tensori jälg on null [15].

1.4.1 β -funktsioonid

Kvantväljateooriast on teada, et dimensioonitud kordajad lagranžiaanitiheiduses sõltuvad vaadeldavate protsesside energiast. Coleman-Weinberg tuletasid avaldise efektiivse (kvantparandatud) potentsiaali jaoks [26]. Selle võib esimeses lähenduses leida lähtudes parameetrite jooksmisest. Energiaskaala tuleb selles lähenduses asendada välja väärtusega. Parameetrite ξ ja λ jooksmisel kehtivad [15]

$$\frac{\partial \xi}{\partial \ln \mu} = \beta_\xi, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \ln \mu} = \beta_\lambda, \quad (1.44)$$

kus

$$\beta_\xi = \frac{9}{8\pi^2} \xi^2, \quad \beta_\lambda = \frac{9}{8\pi^2} \lambda^2 \quad (1.45)$$

on β -funktsioonid, mis määravad ära, kuidas kordajad muutuvad ehk jooksevad, ja μ on energiaskaala. Diferentsiaalvõrrandid (1.44) lahendades saame

$$\xi(\mu) = \frac{\xi(\mu_0)}{1 + \frac{9}{8\pi^2} \xi(\mu_0) \ln \frac{\mu}{\mu_0}}, \quad \lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 + \frac{9}{8\pi^2} \lambda(\mu_0) \ln \frac{\mu}{\mu_0}}. \quad (1.46)$$

Eeldusel, et energiaskaala μ on μ_0 lähedal, kasutame kordajate jaoks esimest järku lähendust $\ln \frac{\mu}{\mu_0}$ suhtes ning saame

$$\xi(\mu) = \xi(\mu_0) + \beta_\xi \ln \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \lambda(\mu) = \lambda(\mu_0) + \beta_\lambda \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.47)$$

Efektiivse energiaskaala leidmiseks võib esimeses lähenduses teha asenduse $\mu \rightarrow \phi$ [27]. Kvantparandite tõttu tekkis dimensiooniga konstant ϕ_0 , mis vastab sellele punktile, ümber mille me kordajad ritta arendasime. See dimensiooniga konstant rikub skaalainvariantsust, sest toob sisse fikseeritud ühikuga suuruse. Niisiis arvestades kvantparandeid ei ole teooria enam skaalainvariantne. Kuna nüüd potentsiaal on kujul

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \left(\lambda(\phi_0) + \beta_\lambda \ln \frac{\phi}{\phi_0} \right) \phi^4, \quad (1.48)$$

siis potentsiaalil tekib uus nullist erinev ($\phi \neq 0$) miinimum. Kokkuvõttes kordajate jooksmine toob sisse uue parameetri, mis rikub skaalainvariantsust, aga võimaldab tekkida uuel miinimumil, mis määrab ära tasakaalupunkti, mille ümber väli hakkab võnkuma.

Peatükk 2

Skalaarse tumeaine teke

Selles peatükis uurin mitteminimaalse seosega skalaarvälja käitumist lähemalt. Uurime skaalainvariantset skalaar-tensor teooriat [15], mida kirjeldab mõjufunktsionaal

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M^2 R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V + \mathcal{L}_M \right), \quad (2.1)$$

kus $M^2 = \xi \phi^2$ ja

$$V = \frac{\beta \phi^4}{4} \left(-\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \right) + V_0, \quad (2.2)$$

kus kasutasime skaalainvariantsuse peatükis 1.4.1 mainitud potentsiaali. Veel lisasime juurde vaakumienergia V_0 ja valisime punkti ϕ_0 sellise, et punktis ϕ_0 on potentsiaali miinimum (sellest tuli liidetav $-\frac{1}{4}$). Edasistes arvutustes eeldame, et V_0 võib olla Plancki tiheduse suurusjärgus, kuna see on kvantparanditest tulev vaakumienergia. Plancki tihedus on $\rho_P = (1,221 \cdot 10^{28} \text{ eV})^4$, aga tänapäeva universumis on mõõdetud $\rho_\Lambda = (2,281 \cdot 10^{-3} \text{ eV})^4$, mistõttu eeldame, et $V \gg \rho_\Lambda$. Eeldades, et universum on homogeenne ja isotroopne, siis valitud potentsiaali kuju tõttu tulevad mõjust (2.1) liikumisvõrrandid [15]

$$\begin{cases} 3M^2 H^2 = -6\xi H \phi \dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_R a^{-4} + \rho_M a^{-3} & (2.3a) \\ (\partial_t^2 + 3H \partial_t) \phi^2 = -\frac{2}{1+6\xi} \left(\beta \frac{\phi^4}{4} - 4V_0 + T_\mu^\mu \right), & (2.3b) \end{cases}$$

kus täpp tähistab tuletist aja järgi $\dot{\phi} = \partial_t \phi$ ja T_μ^μ on aine ning kiirguse energia-impulsi tensori jälg. Kuna kiirguse energia-impulsi tensori jälg tuleb null, siis $T_\mu^\mu = -\rho_M a^{-3}$, kus ρ_M on bariõnaine tänapäevane energiatihedus ja tänapäevale vastab $a = 1$. Väljal ϕ eksisteerib võrrandi (2.3b) järgi tasakaalupunkt ϕ_1 , mille korral selle võrrandi parem pool on null. Väli üritab liikuda selle tasakaalupunkti poole sarnaselt sumbuva harmoonilise

ostsillaatoriga, kuna võrrandi kuju meenutab sumbuva harmoonilise ostsillaatori võrrandit. Tahame, et materia puudumisel langeks tasakaalupunkti potentsiaalse energia tihedus kokku tumeenergia energiatihedusega. Seega tasakaalupunktis kehtivad

$$\begin{cases} \beta \frac{\phi_1^4}{4} - 4V_0 = 0 \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$\begin{cases} \rho_\Lambda = V(\phi_1) = \frac{\beta \phi_1^4}{4} \left(-\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{\phi_1}{\phi_0} \right) \right) + V_0. \end{cases} \quad (2.4b)$$

Nendes kahest võrrandist on võimalik avaldada

$$V_0 = \frac{\beta M_0^4}{16\xi^2} e^{\rho_\Lambda/V_0}. \quad (2.5)$$

Tähistame konstandi

$$M_1^4 = M_0^4 e^{\rho_\Lambda/V_0}. \quad (2.6)$$

Varem mainitud eelduse $\rho_\Lambda \ll V_0$ järgi kehtib ligikaudu $M_1^2 \approx M_0^2$ ja seda lähendust kasutame edaspidistes avaldistes. Tasakaalupunkt M_1^2 on võrdne tänapäevase Plancki massiga $M_P^2 = (2,435 \cdot 10^{18} \text{ GeV})^2$. M_1 on dünaamilise Plancki massi tasakaalupunkt, ümber mille ta hakkab võnkuma.

Lisaks võtame kasutusele skalaarvälja osakese massi. Massi leiame potentsiaali teise tuletise abil skalaarvälja järgi potentsiaali miinimumis (järgnevas priim tähistab tuletist potentsiaali järgi). Osakese mass annab võnkumiste nurksageduse võrrandi (2.3b) järgi, eeldusel, et $\xi \ll 1$ ja hõõrdetegurit pole. Hõõrdetegur muudab sagedust. Massi ruuduks saame

$$m^2 = \frac{\beta}{\xi} M_0^2 = V''(\phi_0) = \beta \phi_0^2 = \frac{\beta}{\xi} M_0^2. \quad (2.7)$$

Järgmisena eeldan, et tumeaine teke toimus peale Suurt Pauku sellisel ajal, kui universumis domineeris kiirgus. Siis saame Friedmanni võrrandis võtta lihtsustatult

$$3M^2 H^2 = \rho_R a^{-4}, \quad (2.8)$$

kus ρ_R on kiirguse energiatihedus tänapäeval ja valisime tänapäevaseks mastaabikordajaks $a = 1$.

Edasi kasutame aja asemel muutujat $N = \ln(a)$, siis saame Plancki massi liikumisvõrrandiks

$$\partial_N^2 M^2 + \left(1 - \frac{\partial_N M^2}{2M^2} \right) \partial_N M^2 = -\frac{6M^2 a^4}{\rho_R (1 + 6\xi)} \left(\frac{m^2}{4M_0^2} (M^4 - M_1^4) - \xi \rho_M a^{-3} \right). \quad (2.9)$$

Võrrandi (2.9) tuletamisel ei ole me veel muid lähendusi teinud, välja arvatud Friedmanni võrrandis (2.3a) eeldasime, et domineerib kiirgus ja teised liikmed jätsime kõrvale. Nüüd on meil kahe võrrandiga süsteemi (2.3) asemel üks võrrand, mille käitumist hakkame edasi uurima. See on mittelineaarne diferentsiaalvõrrand, mis oma kuju poolest jällegi meenutab sumbumisega harmoonilise ostsilaatori diferentsiaalvõrrandit. Hiljem näeme, et lahendid ligikaudu ka nii käituvad. Võrrandil on paremal pool materiaa energiatihedusest ρ_M tulenev allikaliige. Selle liikme juures olev a^{-3} pidevalt muutub. Seega võrrandil ei leidu püsivat tasakaalupunkti ja tekitatakse Plancki massi võnkumised isegi siis, kui algväärtused valida sellised, mille korral alghetkel võrrandi parem pool on null. Edasi uurime, kui palju tumeainet see allikaliige on võimeline tekitama.

Skalaarväli ϕ tekitab nii tumeaine kui tumeenergia. Tumeenergia osa tekitab potentsiaalne energia tasakaalupunktis ja tumeaine võnkumiste energia. Jagan Friedmanni võrrandis (2.3a) oleva skalaarvälja energia kolme ossa

$$\left(-6\xi H\phi\dot{\phi}\right) + \left(V(\phi_1)\right) + \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) - V(\phi_1)\right), \quad (2.10)$$

kus edaspidi esimest osa ignoreerime eeldusel $\xi \ll 1$, teine osa on tumeenergia energiatihedus ja kolmas osa on tumeaine energiatihedus. Skalaarvälja energiatiheduse saab kirjutada kujul

$$\rho_{DM} = \frac{(\partial_t(M^2))^2}{8\xi M^2} + \frac{m^2}{16\xi M_0^2} \left(M^4 \ln\left(\frac{M^4}{M_0^4}\right) - M_1^4 \ln\left(\frac{M_1^4}{M_0^4}\right) - (M^4 - M_1^4) \right). \quad (2.11)$$

Hiljem kasutame selle avaldise lineaarset lähendit tumeaine energiatiheduse arvutamiseks.

2.1 Lineaarne lähend

Selles peatükis algab töö originaalne osa, kus leiame varem mainitud mudeli järgi saadud võrrandile (2.9) lineaarse lähendi ja hiljem hakkame uurima skalaarse tumeaine teket selle võrrandi järgi. Lineaarse lähendi leidmiseks eeldame, et Plancki mass muutub vähe ja leiame Plancki massi suhtes skalaarvälja üldisele liikumisvõrrandile (2.9) lineaarse lähenduse. Defineerime Plancki massi muutuse $\delta M^2 = \delta(M^2) = M^2 - M_1^2$. Siis $M^2 = M_1^2 + \delta(M^2) = M_1^2 + \delta M^2$ ja lähendame

$$M^4 - M_1^4 = (M^2 - M_1^2)(M^2 + M_1^2) = \delta M^2(M^2 + M_1^2) \approx 2M_1^2 \delta M^2. \quad (2.12)$$

Arvestame Plancki mass üldises liikumisvõrrandis (2.9) ainult lineaarseid liikmeid δM^2 ja selle

tuletiste suhtes ja saame

$$\partial_N^2 \delta M^2 + \partial_N \delta M^2 = -\frac{6a^4}{\rho_R(1+6\xi)} \left(\left(\frac{1}{2} m^2 M_1^2 - \xi \rho_M a^{-3} \right) \delta M^2 - \xi \rho_M a^{-3} M_1^2 \right). \quad (2.13)$$

Lineaarses lähenduses on skalaarvälja võnkumiste energiatihedus üldisest skalaarse tumeaine energiatiheduse avaldisest (2.11) leitav asendades $M^2 = M_1^2 + \delta M^2$ ja jättes ainult esimest järku liikmed alles (lisaks kasutan $M_0^2 \approx M_1^2$), mis annab

$$\rho_{DM} = \frac{(\partial_t(\delta M^2))^2}{8\xi M_1^2} + \frac{m^2(\delta M^2)^2}{8\xi M_1^2}. \quad (2.14)$$

Saadud lineaarne liikumisvõrrand (2.13) on endiselt piisavalt keeruline, et analüütilist lahendit on sellele raske leida. Selle võrrandi paremal poolel sulgudes olevas avaldises

$$\left(\frac{1}{2} m^2 M_1^2 - \xi \rho_M a^{-3} \right) \delta M^2 \quad (2.15)$$

sõltuvalt mastaabikordajast a võib esimest või teist liidetavat lugeda tühiseks ja nii saab võrrandit edasi lihtsustada.

Gravitatsioonikonstandi muutumine mõjutab nukleosünteesi ja seeläbi universumi keemilist koostist. Suured gravitatsioonikonstandi muutused tekitaksid vaatlustega vastuolu. Sellest tuleneb võrdlemisi nõrk piirang [15]

$$\frac{\beta}{\xi^2} = \frac{m^2}{\xi M_0^2} > 3,5 \cdot 10^{-69}. \quad (2.16)$$

Seda piirangut kasutame ka järgmistes alapeatükkides korduvalt, et selgitada välja, kui palju tumeainet võib tekkida.

Kasutades materia energiatiheduse avaldist $\rho_M = (1,167 \cdot 10^{-3} \text{ eV})^4$ ja piirangut (2.16), saame leida, et avaldises (2.15) hakkab teine liidetav domineerima, kui universumi temperatuur on $T > 75 \text{ TeV}$. Nii kõrgetel temperatuuridel tuleb arvestada eri juhte, mis komponendid panustavad võrrandi (2.13) paremal poolel allikaliikmetesse. Tuletama meelde, et allikaliige tuli energia-impulsi tensori jäljest. Osakesed, mille energia-impulsi tensori jälg tuleb null, sinna ei panusta. Kui eeldame, et panustab ainult bariõnaine, siis võrrand (2.13) kehtib, aga kui eeldame, et allikaliikmesse panustab ka kõrgetel temperatuuridel domineeriv relativistlike massiivsete osakeste plasma, siis tuleb energiatiheduste avaldise muuta. Kõigepealt uurime alapeatükis 2.2 võrrandi (2.13) käitumist juhul, kui avaldise (2.15) teise liikme jätame arvestamata. Seda juhtu nimetame madala temperatuuri juhuks. Peale seda uurime alapeatükis 2.3 juhtu, kui jätame esimese liikme arvestamata, mida nimetame kõrge temperatuuri juhuks. Viimasena uurime

juhtu, kus arvestame tekkiva plasmaga ja energiatiheduste avaldised muutuvad.

2.2 Madala temperatuuri juht

Siin uurime võrrandi (2.13) käitumist eeldusel

$$\frac{m^2}{2M_0^2}M_1^4 \gg \xi \rho_M a^{-3}. \quad (2.17)$$

Suurte a väärtuste ehk hilise universumi korral kehtib see eeldus järjest paremini. Isegi kui see tingimus alati ei kehti, siis selles alapeatükis leitav lahend kirjeldab skalaarvälja käitumist hilises universumis, kus temperatuurid on madalad ja mastaabikordaja on suur. Plancki massi liikumisvõrrand (2.13) võtab kuju

$$\partial_N^2 \delta M^2 + \partial_N \delta M^2 = -\frac{6\xi a^4}{\rho_R(1+6\xi)} \left(\frac{m^2}{2\xi M_0^2} M_1^4 \delta M^2 - \rho_M a^{-3} M_1^2 \right) \quad (2.18)$$

See võrrand on võimalik viia kujule

$$x^2 \partial_x^2 f + x \partial_x f + \left(x^2 - \frac{1}{16} \right) f = x^{3/4}, \quad (2.19)$$

kus $x = \frac{\sqrt{k}}{2} a^2$, konstandid

$$k = \frac{3m^2 M_1^2}{\rho_R(1+6\xi)}, \quad c = \frac{6\xi M_1^2 \rho_M}{\rho_R(1+6\xi)} \quad (2.20)$$

ja

$$\delta M_1^2(x) = \frac{c}{4} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{k}}} x^{-1/4} f(x). \quad (2.21)$$

See on mittehomogeenne Besseli võrrand, mis ei sõltu ühestki parameetrist. Sellele võrrandile oskab tarkvara Mathematica 11 leida täpse analüütilise lahendi Besseli funktsioonide ja hüpergeomeetriliste jadade kaudu. Suurte x -ide korral käitub lahend ligikaudu nagu $f(x) \propto \sin(x)/\sqrt{x}$, mida on jooniselt 2.3 näha. Selles veendumiseks vaatame olukorda, kui suure x korral jagada võrrandi (2.19) mõlemad pooled x^2 -ga läbi, siis näeme, et allikaliige on väike ja tekib ligikaudu sumbuva harmoonilise ostsillaatori võrrand

$$\partial_x^2 f + \frac{1}{x} \partial_x f + f = 0, \quad (2.22)$$

mille lahendiks on ligikaudu $\sin(x)/\sqrt{x}$. Kui x on väike, siis on allikaliige suur ja võnkumise amplituud kasvab. See vastab tumeaine tekkele ja järelkult tumeaine teke toimub varajases universumis, millele vastab väike x . Valime algtingimused alghetkel $x = \varepsilon \ll 1$ sellised, et $f(\varepsilon) = 0$ ja $f'(\varepsilon) = 0$. Siis alghetkel on skalaarväli tasakaalupunktis paigal ja võnkumist ei toimu, aga allikaliige paneb skalaarvälja võnkuma. Selliste algtingimuste valikuga vaatame olukorda, kus varajases universumis ($\varepsilon \ll 1$) tumeainet veel ei ole tekkinud ($f(\varepsilon) = 0$ ja $f'(\varepsilon) = 0$) ja uurime, kas ja kui palju seda hakkab tekkima.

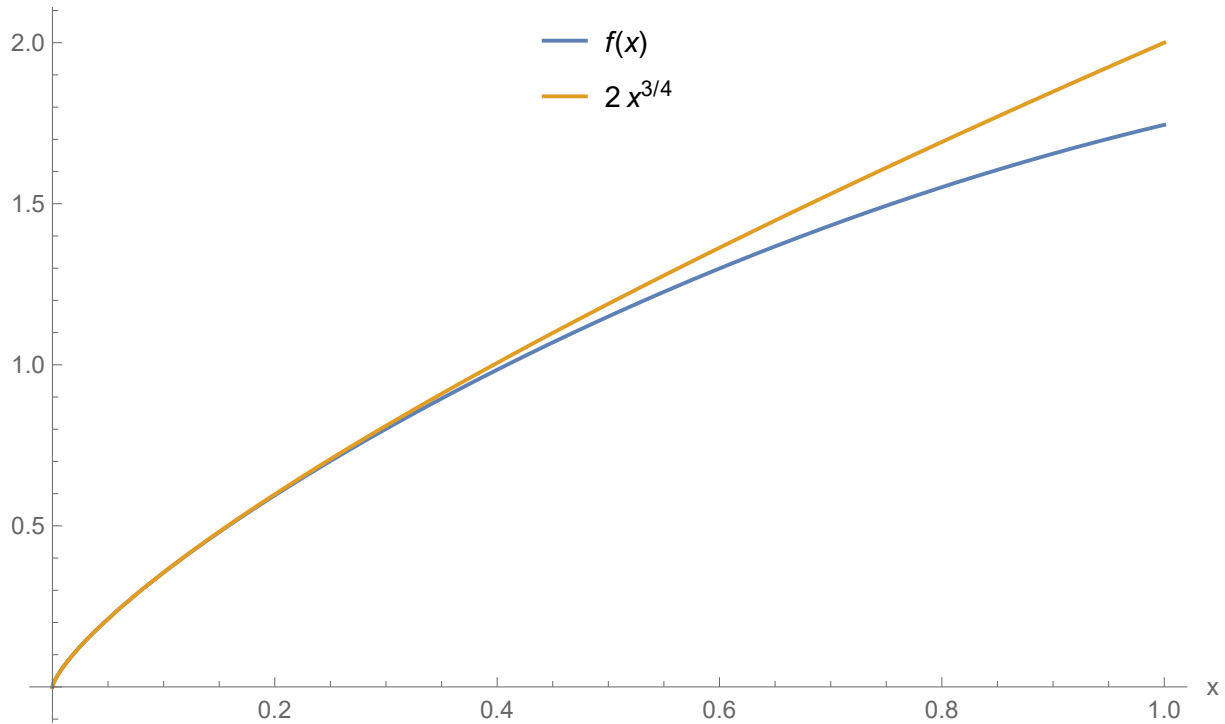
On teada, et teist tüüpi Besseli funktsioonid lähevad lõpmatuks kui läheneda punktile $x = 0$. Et saada lahendi käitumisest paremat ettekujutust ja vältida võimalikke probleeme, uurime, kuidas võrrandi (2.19) lahend käitub kui $x \ll 1$. Väikeste x väärtuste korral saame diferentsiaalvõrrandi heas lähenduses ümber kirjutada järgnevalt:

$$x^2 \partial_x^2 f + x \partial_x f - \frac{1}{16} f = x^{3/4}. \quad (2.23)$$

Seda on võimalik täpselt lahendada astmefunktsioonidega ja arvestades algtingimusi tuleb lahendiks

$$f = 2x^{3/4} \left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{x}} \right)^2. \quad (2.24)$$

Siit on näha, et võime viia alghetke valiku $\varepsilon \rightarrow 0$ ja lahend käitub järjest paremas lähenduses nagu $2x^{3/4}$. Sellest järeldame, et alghetke ε täpne valik ei ole oluline ja ei muuda tumeaine tekkimist, sest lahendi väärtus mingis punktis $x \gg \varepsilon$ tuleb ligikaudu sama sõltumata täpsest ε valikust. Seega täpse ε väärtuse jätame edaspidi defineerimata ja eeldame, et $\varepsilon \ll 1$. Niisiis alghetkel ε paigal olev funktsioon pannakse allikaliikme abil liikuma funktsiooni $2x^{3/4}$ kuju järgi. Seda siis eeldusel, et $x \ll 1$, aga sealt edasi x kasvades hakkab lahend sumbuvalt võnkuma ligikaudu võrdeliselt $\sin(x)/\sqrt{x}$ kuju järgi.

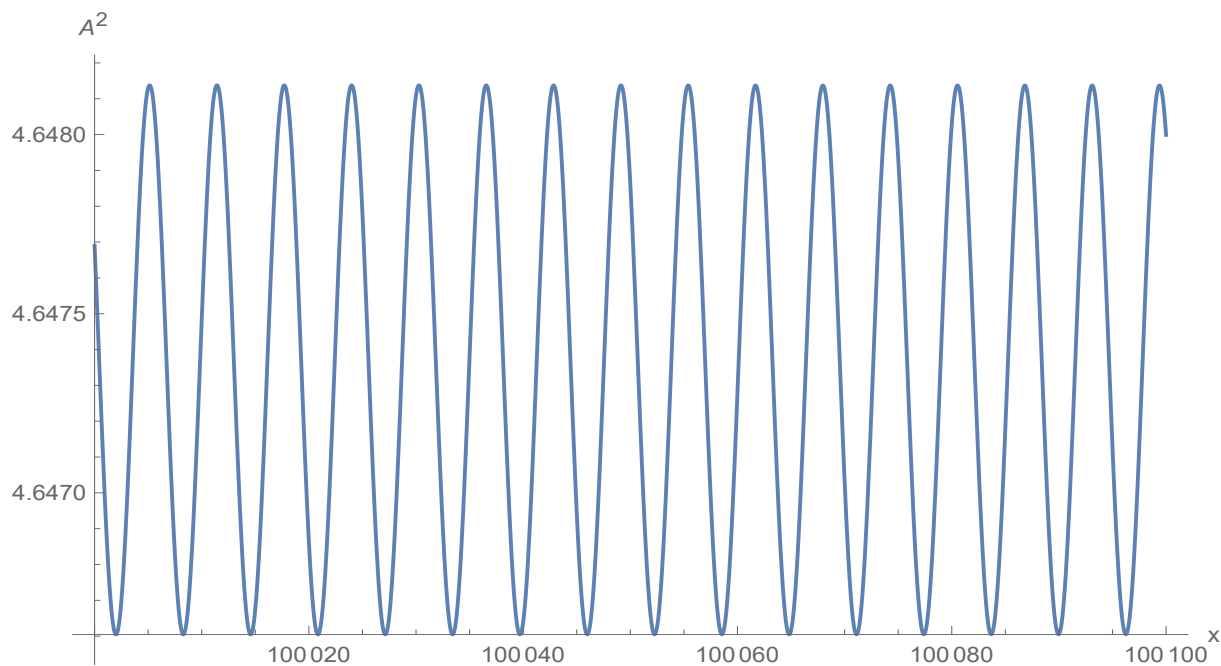


Joonis 2.1: $f(x)$ vs $2x^{3/4}$ väikeste x -ide korral, kui alghetk $\xi \ll 1$.

Nagu varasemalt öeldud, siis suurte x -ide korral on lahend heas lähenduses võrdeline funktsiooniga $\sin(x)/\sqrt{x}$. Võrdelisuse kordaja leidmiseks paneme tähele, et kui $f \approx A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$, siis

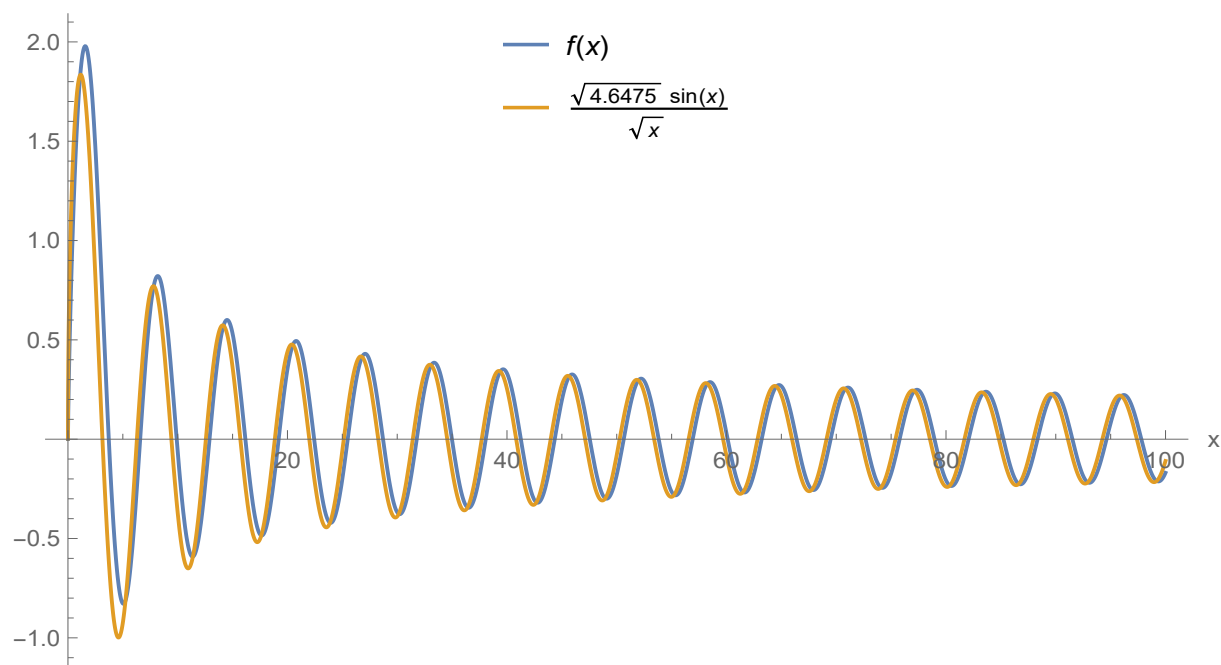
$$(\sqrt{x}f)^2 + \partial_x(\sqrt{x}f)^2 \approx A^2. \quad (2.25)$$

Leiame tarkvara Mathematica 11 abil täpse lahendi diferentsiaalvõrrandile (2.19), varem mainitud algtingimustega (kus $\varepsilon \ll 1$) ja seejärel teeme täpse lahendi $f(x)$ abil funktsioonist $(\sqrt{x}f)^2 + \partial_x(\sqrt{x}f)^2$ graafiku. Joonisel 2.2 kujutame A^2 väärtust suurte x -ide korral, kus sinusoidaalne lähend kehtib hästi. Näeme, et kordaja A^2 on tõepoolest ligikaudu konstantne.



Joonis 2.2: $A^2 = (\sqrt{x}f)^2 + \partial_x(\sqrt{x}f)^2$ suurte x -ide korral.

Joonise 2.2 pealt on näha, et ligikaudu $A^2 = 4,6475$. Seega $f \approx \sqrt{4,6475} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$. Joonise 2.3 pealt näeme, et see lähendus sobib üpris hästi ka väikeste x -ide korral.



Joonis 2.3: $f(x)$ vs $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ lähend.

Tumeaine energiatiheduse leiame üldise skalaarvälja energiatiheduse valemi (2.14) abil, kasutades eeldust $\xi \ll 1$:

$$\rho_{DM} = \frac{m^2}{8\xi M_0^2} ((\partial_x(\delta M^2))^2 + (\delta M^2)^2). \quad (2.26)$$

Plancki mass võngub sinusoidaalselt muutuva amplituudiga, kus amplituud $\propto 1/x^{3/4}$. Kui ühe võnkeperioodi jooksul Plancki massi võnkumise amplituud ei muutu ehk $1/x^{3/4} \approx \text{konst}$, siis on tumeaine energiatihedus selle perioodi jooksul ka ligikaudu konstantne. Kui me ei oleks teinud eeldust $\xi \ll 1$, siis tumeenergia tihedus võnguks välja võnkumisega kaasa, sest ilma selle eelduseta oleks avaldises (2.26) ühe liidetava ees lisaks kordaja $1/(1+\xi)$. Seega meie mudelis peab kehtima $\xi \ll 1$. Näeme, et skalaarse tumeaine energiatihedus $\rho_{DM} \propto 1/x^{3/2} \propto 1/a^3$. Saime oodatud tulemuse, mille järgi skalaarvälja energiatihedus muutub universumi paisudes samamoodi sõltuvalt mastaabikordajast nagu tavaline aine. Seega sobib skalaarväli selles suhtes kirjeldama tumeainet.

2.2.1 Mudeli parameetrite määramine

Eelmises alapeatükis tuletasime lahendi üldkuju ja tumeaine energiatiheduse üldkujud sõltuvalt konstantide väärtustest. Nüüd proovime leida sellised konstantide väärtused, et tekiks kogu tänapäeval mõõdetud kogus tumeainet. Nagu varsti näeme, siis madala temperatuuri juhul ei ole võimalik selliseid konstante leida.

Leian tänapäevase tumeaine tihedusparameetri $\Omega_{DM} = \rho_{DM}/3M^2H^2$, kus ρ_{DM} leian skalaarse tumeaine energiatiheduse valemi (2.26) abil. Selle jaoks võtame $a = 1$, mis vastab tänapäevale ja saame

$$\Omega_{DM} = 0,539 \Omega_M B, \quad (2.27)$$

kus B on Plancki massi võnkumise amplituudi suhteline kordaja ehk kehtib $\delta M^2/M_1^2 = B \sin(x)/x^{3/4}$. Avaldame B kasutades võrrandit (2.43) ja varem leitud ligikaudset avaldist $f(x) \approx \sqrt{4,6475} \sin(x)/\sqrt{x}$:

$$B = 3,475 \frac{\rho_M}{\rho_R^{3/4} M_1} \left(\frac{\xi M_1^2}{m^2} \right)^{1/4} \left(\frac{\xi}{1+6\xi} \right)^{3/4}, \quad (2.28)$$

Võrrandiga (2.27) saime siduda skalaarvälja võnkumistest tekkiva tumeaine tänapäevase tihedusparameetri tänapäevase tavalise barüonaine tihedusparameetriga. Teame, et kehtib $\Omega_M = 0,049$. Suurus B määrab ära tekkiva tumeaine koguse. Lisaks suurus B defineerib Plancki massi võnkumiste suhtelise amplituudi ja vaadates joonist 2.3 on näha, et $\sin(x)/x^{3/4}$ esimese

võnke amplituud on suurusjärgus 1, seega B annab ligikaudu Plancki massi suhtelise muutuse $\delta M^2/M_1^2$ esimese võnke amplituudi. Plancki mass suhteline muutus ei tohi minna suureks, sest esiteks siis meie tehtud lähendid ei kehti. Teiseks on artiklis [15] toodud juba varem mainitud piirangut (2.16) arvestades võimalik avaldada võrrandist (2.28)

$$B < 8,39 \cdot 10^{-11} \left(\frac{\xi}{1+6\xi} \right)^{3/4}. \quad (2.29)$$

Peab kehtima $\xi \ll 1$, sest tumeaine energiatiheduse (2.26) tuletamisel tegime eelduse, et $1+6\xi \approx 1$, vastasel korral tumeaine energiatihedus võnguks väljaga kaasa. Kokkuvõttes peab kehtima $B \ll 10^{-11}$ ja seetõttu ka

$$\Omega_{DM} \ll 10^{-11}. \quad (2.30)$$

Seega selle vaadeldud mudeliga saab tekitada ainult väga väikese koguse tänapäevasest tumeainest. Probleem tuleneb sellest, et Plancki massi võnkumiste suhteline amplituud peab olema väike ja väikesed võnkumised vastavad väikesele skalaarse tumeaine energiatihedusele.

2.3 Kõrge temperatuuri juht

Selles alapeatükis eeldame, et võrrandis (2.13) kehtib

$$\frac{1}{2}m^2M_1^2 \ll \xi\rho_M a^{-3}, \quad (2.31)$$

ja uurime lahendi käitumist sellisel juhul. Nagu varem öeldud, siis selle tingimuse kehtimise jaoks peab universumi temperatuur olema $T > 75 \text{ TeV}$. Selles peatükis eeldan, et allikaliige Plancki massi liikumisvõrrandis (2.13) jääb samale kujule, kuigi nii kõrgetel temperatuuridel on küsitav, kas mateeria energiatihedus jääb samaks, sest siis eksisteerib hoopis kvark-gluuon plasma. Sellest hoolimata uurin Plancki massi liikumisvõrrandi käitumist eeldusel (2.31) ja saan võrrandi

$$x^2 \partial_x^2 f_2 - \left(\frac{3}{2} + x^2 \right) f_2 = 0, \quad (2.32)$$

kus $x = 2\sqrt{k_2}\sqrt{a}$, $M^2(x) = x^{-3/2}f_2(x)$ ja konstant

$$k_2 = \frac{6\xi\rho_M}{\rho_R(1+6\xi)} \quad (2.33)$$

Uurime taaskord funktsiooni käitumist eraldi suurte ja väikeste x -ide korral, nagu varem. Kui x on suur, siis võime võrrandis (2.32) liiget $\frac{3}{2}$ ignoreerida ja saame, et funktsioon f_2 kasvab eksponentsiaalselt. Kuna vaatleme kõrgetemperatuurilist juhtu, siis alghetkel oli a ja ka x väike,

seega uurin lähemalt lahendit väikeste x -ide korral. Väikeste x -ide korral saame lähendada:

$$x^2 \partial_x^2 f_2 - \frac{3}{2} f_2 = 0. \quad (2.34)$$

Selle võrrandi üldlahendiks on kahe x astme kombinatsioon:

$$f_2(x) = C_1 x^{\frac{1+\sqrt{7}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-\sqrt{7}}{2}}. \quad (2.35)$$

Valime algväärtused nii, et (hetkel suvaliselt valitud) punktis ε oleks Plancki mass M^2 paigal ja võrdne tasakaalupunkti väärtusega M_1^2 . Need on samad algtingimused, mis eelmises peatükis valisime ja see vastab olukorrale, kus Planck mass seisab tasakaalupunktis paigal ja me uurime, kuidas ta edasi liikuma hakkab. Nende algtingimustega saame lahendiks

$$M^2(x) = M_1^2 \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^{\frac{1+\sqrt{7}}{2}} + \frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^{\frac{1-\sqrt{7}}{2}} \right) \quad (2.36)$$

Võrrandi (2.36) abil on näha, et kui valime suhte x/ε piisavalt suure (näiteks valime ε väga väikese, ehk tumeaine algne paigaloleku hetke on väga varajane), siis saame Plancki massi ajada ükskõik kui suureks. Lisaks nagu varem mainisime, siis x kasvades teatud piirist alates hakkab Plancki mass lausa eksponentsiaalselt kasvama. Seega igal juhul võrrandi (2.32) järgi saame tekitada suvalise Plancki massi nihke, valides vastava alghetke. Plancki mass kasvab, kuni ühel hetkel universumi mastaabikordaja on läinud nii väikeseks, et peatüki alguses tehtud võrratus (2.31) enam ei kehti, vaid hakkab kehtima vastupidine võrratus. Seejärel hakkab Plancki mass sumbuvalt võnkuma selliselt, nagu eelmises peatükis nägime. Oletame, et võnkumise alguseks on tekitatud Plancki massi nihe δM^2 . Sellel hetkel kehtib (2.31) järgi ligikaudu

$$\frac{m^2}{\xi} = \frac{2\rho_M a^{-3}}{M_1^2} = \frac{2\rho_M(a)}{M_1^2}. \quad (2.37)$$

Selles avaldises ρ_M on tänapäevane barüonaine energiatihedus ja $\rho_M(a) = \rho_M a^{-3}$ on barüonaine tihedus vaadeldaval hetkel, kui algab skalaarvälja võnkumine. Kasutades seda seost leian tumeaine energiatiheduse samal ajahetkel üldise tumeaine energiatiheduse valemi (2.14) abil. Võttes lihtsustavalt, et $\partial_t \delta M^2 = 0$, siis saame

$$\rho_{DM}(a) = \frac{\rho_M(a)}{4} \left(\frac{\delta M^2}{M_1^2} \right)^2. \quad (2.38)$$

Nii tumeaine kui barüonaine skaleeruvad samamoodi paisudes, seega kehtib viimane võrduse iga a korral. Plancki massi suhtelise amplituudi jaoks kehtis piirang (2.29), mida arvestades

peab kehtima

$$\rho_{DM} \ll 10^{-22} \rho_M. \quad (2.39)$$

Näeme, et kõrgetel temperatuuridel $> 75 \text{ TeV}$ on võimalik veel vähem tumeainet tekitada, kui madalamatel. Põhjus seisneb selles, et nii kõrgetel temperatuuridel saab küll tekitada ükskõik kui suure Plancki massi kõrvalekalde, aga nii kõrgel temperatuuril universum paisub edasises arengus väga palju ja tumeaine energiatihedus hajub. Lõppkokkuvõttes järeldame, et võrrand (2.13) ei luba tekkida tänapäevasel kogusel tumeainel ükskõik milliseid temperatuure arvestades. Sestap uurime järgmisena olukorda, kus relativistlik osake-antiosake plasma põhjustab tumeaine teket.

2.4 Relativistlike massiivsete osakeste panus

Selles osas uurin juhtu, kui nähtava aine temperatuur on nii suur, et see sisaldab massiivseid relativistlikke osakesi, mis kannavad suurt osa aine energiatihedusest. Nimetame seda osakeste kogumit plasmaks. Olulisel määral mingite osakeste tekkimise jaoks peab temperatuur olema suurem kui osakese mass. Enamasti tekivad osake-antiosake paarid, mis annihileeruvad, kui temperatuur on väiksem kui osakeste mass ja seega madalamatel temperatuuridel osake-antiosake paare praktiliselt ei eksisteeri. Plancki massi liikumisvõrrandis (2.13) tulenes liige $\rho_M a^{-3}$ energia-impulsi tensori jäljest. Kõrgetel temperatuuridel tekib osakesi juurde ja energiatihedus suureneb, sest osakeste arv on Fermi ja Bose jaotuste järgi universumiga termodünaamilises tasaakaalus. Osakeste tekke tõttu universumi energiatihedus ρ muutub, aga kuna tegemist on termodünaamilises tasaakaalus olevate osakestega, siis tuleb arvestada energia-impulsi tensori jälje arvutamisel ka rõhuga. Näiteks footonite korral tuleb jälg null, sest footonitel $p = \frac{1}{3}\rho$. Üldisemalt kehtib, nagu varem mainitud, et skaalainvariantse mõjufunktsionaaliga osakeste energia-impulsi tensori jälg tuleb null. Jälge panustavad ainult need osakesed, mis saavad oma massi skaalainvariantsust rikkuvate dimensiooniga konstantide kaudu. Eeldades praegu, et vaatleme termodünaamilises tasaakaalus relativistlikke osakesi, mille korral jälg $T_\mu{}^\mu$ ei tule null, siis seisumassiga m_X osakeste korral tuleb energia-impulsi tensori jäljeks [15]

$$T_\mu{}^\mu = \frac{g_X m_X^2 T^2}{2\pi^2} = \frac{g_X m_X^2 T_0^2}{2\pi^2 a^2} = \rho_P a^{-2}, \quad (2.40)$$

kus g_X on vaadeldava osakese vabadusastmete arv ja $T_0 = 2,7 \text{ K}$ on tänapäeva universumi temperatuur. Kuna plasma energia-impulsi tensori jälg on võrdeline massi ruuduga, siis domineerivad kõige suurema massiga osakesed. Kui on ühest kvargist ja antikvargist koosnev plasma, siis $g_X = 12$, sest on kolme eri värve kvarke, kahe eri spinni väärtusega ja viimane tegur kaks tuleb sellest, et plasmas on osake ja antiosake mõlemad. Elektron-positron plasma korral

$$g_X = 4.$$

Teeme läbi analoogse arvutuskäigu, mis alapeatükis 2.2, aga asendame $\rho_M a^{-3} \rightarrow \rho_P a^{-2}$. Lisaks peame arvestama, et ka kiirguse ρ_R väärtus muutub, sest meil tekkis juurde relativistlikke osakesi, mille energiatihedus on võrreldav kiirguse energiatihedusega. Relativistlike osakeste energiatihedus skaleerub sarnaselt kiirgusega $\propto a^{-4}$. Kiirguse ja relativistlike osakeste energiatihedus on

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (2.41)$$

kus g_* on osakeste summaarne vabadusastmete arv. Tänapäevases energiatiheduses ρ_R on arvestatud nii footonite kui neutriinode panust. Footonite jaoks $g = 2$, neutriinode jaoks efektiivselt $g \approx 1,4$ [8]. Varajases universumis on relativistlike osakeste tekke tõttu energiatihedus vastavalt kõikide relativistlike osakeste vabadusastmete suhte võrra suurem, seega peame tegema asenduse

$$\rho_R \rightarrow \rho_R \frac{2 + 1.4 + \sum_i g_i}{3.4} = \rho_{RGR}, \quad (2.42)$$

kus g_R on relativistlike osakeste vabadusastmete suhe.

Lahendame nüüd Plancki massi liikumisvõrrandi (2.18), arvestades relativistlike osakeste panust. Konstandid k ja c on samad, aga nendes on asendatud $\rho_M \rightarrow \rho_P$ ja $\rho_R \rightarrow \rho_{RGR}$ võrreldes peatükiga 2.2. Läheme taaskord üle muutujale $x = \frac{\sqrt{k}}{2} e^{2N}$ ja teeme asenduse

$$\delta M^2(x) = \frac{c}{2\sqrt{k}} x^{-1/4} f(x), \quad (2.43)$$

siis saame liikumisvõrrandiks

$$x^2 \partial_x^2 f + x \partial_x f + \left(x^2 - \frac{1}{16} \right) f = x^{5/4}. \quad (2.44)$$

Selle lahendi käitumine on sarnane nagu peatükis 2.2 ja saame analoogselt lahendada sarnase tulemuse

$$\delta M^2 \approx \sqrt{1,065} \frac{c}{2\sqrt{k}} \frac{\sin(x)}{x^{3/4}}. \quad (2.45)$$

Sellele võnkumisele vastav tänapäevane ($a = 1$) skalaarse tumeaine tihedusparameeter on kasutades skalaarvälja energiatiheduse avaldist (2.26)

$$\Omega_{DM} = 0,496 \frac{\rho_P^2}{M_1^5 H^2 (\rho_{RGR})^{1/4}} \left(\frac{\xi M_1^2}{m^2} \right)^{3/4} \xi^{1/4} < \frac{g^2}{g_R^{1/4}} \left(\frac{m_X}{112 \text{ MeV}} \right)^4 \xi^{1/4}, \quad (2.46)$$

kus kasutasime $\xi M_1^2/m^2$ jaoks piirangut (2.16). Et tekiks tänapäeval nähtav kogus tumeainet

($\Omega_{DM} = 0.265$), siis peab kehtima

$$\xi > \frac{g_R}{g^8} \left(\frac{80 \text{ MeV}}{m_X} \right)^{16}. \quad (2.47)$$

Minimaalne ξ väärtus sõltub tugevalt massiivseima relativistliku osakese massist $\xi_{min} \propto \frac{1}{m_X^{16}}$, seega suurusjärgu madalamad massid m_X kui 80 MeV ei võimalda tänapäeval kogusel tumeainel tekkida, kuna vajavad $\xi > 1$.

Näiteks kui valime $\xi = 8,8 \cdot 10^{-9}$, $m_X = 100 \text{ MeV}$, $g = 10$, $g_R = 30$ ja $m = 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$, siis tekib skalaarse tumeainena kogu universumi tumeaine. Nende parameetrite korral võnkumise amplituud $\delta M^2/M_1^2$ on ligikaudu $8,8 \cdot 10^{-9}$. Siin ühtegi vastuolu ei tekkinud ja need konstandid sobivad kirjeldama tumeaine teket. Saime tulemuseks, et kõrgetel temperatuuridel tekkivad relativistlikud osakesed põhjustavad suurema skalaarvälja võnkumiste tekke, mis sõltuvalt konstantidest võib tekitada kogu tänapäevase tumeaine. Konkreetse näite korral kui eeldame, et kui temperatuuril üle 100 MeV skalaarset tumeainet veel ei olnud, siis osake-antiosake plasma selle spontaanselt tekitab. See on üks võimalus seletada, kust tumeaine pärineb.

Peatükk 3

Kokkuvõte

Uurisime skaalainvariantset skalaarse tumeaine mudelit, kus skaalainvariantsus on rikutud kordajate jooksmise tõttu. Skaalainvariantsuse rikkumine tekitab potentsiaaliinimumi, mille lähedal hakkab meie mudelis skalaarväli võnkuma. Skalaarvälja võnkumiste tasakaalupunkti energia vastab tumeenergiale ja võnkumiste energia tumeainele. Selline mudel võimaldab seletada nii tumeenergiat kui tumeainet skalaarvälja abil. Meie uurisime, kuidas need võnkumised arenevad ja tekivad varajases universumis.

Kõigepealt kirjutasime välja Plancki massi võnkumise võrrandid kiirgusdominantsetes universumis ja seejärel leidsime Plancki massi väikese muutuse suhtes lineaarsed võrrandid. Eeldasime, et tumeaine tekkesse panustav allikaliige skaleerub nagu a^{-3} , mis vastab bariõnainele. Üldisemalt on allikaliikmeks on kogu aine, mis saab oma massi skaalainvariantsust rikkuvate konstantide kaudu, seega näiteks footonid ei tekita skalaarvälja võnkumisi. Sõltuvalt sellest, kuidas elementaarosakesed oma massi saavad ja kas nende mõjufunktsionaal on skaalainvariantne või mitte, võivad nad panustada skalaarse tumeaine tekkesse või mitte. Algselt vaatasime juhtu, kus tumeaine allikaks oli bariõnaine. Hiljem vaatasime juhtu, kus allikaks oli relativistlik elementaarosakeste plasma. Lineariseeritud võrrandeid edasi uurides ja lihtsustades sõltuvalt temperatuurist leidsime, et madalal temperatuuril ei tekita bariõnaine energiatihedus piisavalt suuri skalaarvälja võnkumisi, mis suudaks seletada tänases universumis nähtava tumeaine kogust. Tumeaine tekkimist piirab väike mateeria energiatihedus ja konstantidele kehtivad piirangud, mis tulenesid sellest, et gravitatsioonikonstant ei saa väga kiiresti muutuda, vastasel korral oleks selle mõju universumi keemilises koostises näha. Kõrgematel temperatuuridel $T > 75 \text{ TeV}$ võimaldas antud mudel tekkida veel väiksemal kogusel tumeainel, sest Plancki massi maksimaalne kõrvalekalle on piiratud ja kui skalaarne tumeaine tekkis väga varajases universumis, on skalaarvälja võnkumistel rohkem aega sumbuda. Eraldi vaatasime juhtu, kus võnkumiste allikaliikmeks on

relativistlik plasma.

Arvestades tekkivat massiivsete osakeste relativistlikku plasmat nägime, et oli võimalik leida sellised konstantide väärtused, mis lubavad tekkida tänapäeval kogusel tumeainel. Põhjus on selles, et tänu osakeste spontaansele tekkimisele materia energiatihedus kasvab ja kuna see materia oli võnkumiste allikaliikmeks, siis tekitatakse rohkem skalaarset tumeainet. Piisava tumeaine sai tekitada alates temperatuuridest suurusjärgus 100 MeV.

Tänuavaldused

Tänan oma juhendajaid Hardi Veermäed ja Laur Järve. Tänan KBFI-d, mille kõrge energia labori juures ma oma lõputööd tegin. Olen eriti tänulik oma põhijuhendajale Hardi Veermäele, kellega ma sain tihti kokku, meil olid huvitavad vestlused ja kes veetis palju aega mulle kõikvõimalikke asju seletades.

Andres Põldaru

Kirjandus

- [1] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation,” *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, pp. 844–847, 1915.
- [2] A. Einstein, “Cosmological considerations in the general theory of relativity,” *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, pp. 142–152, 1917.
- [3] V. Slipher, “Further notes on spectrographic observations of nebulae and clusters,” *Publications of the American Astronomical Society*, vol. 4, pp. 284–286, 1922.
- [4] A. Friedmann, “Über die krümmung des raumes,” *Z. Phys*, vol. 10, pp. 377–386, 1922.
- [5] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 15, pp. 168–173, 1929.
- [6] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, ja J. Tonry, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [7] W. Penzias, “A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s,” *Astrophysical Journal*, vol. 15, pp. 419–421, 1965.
- [8] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, ja et al., “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *A&A*, vol. 594, p. A13, September 2016.
- [9] M. Persic, P. Salucci, ja F. Stel, “The universal rotation curve of spiral galaxies - I. The dark matter connection,” *MNRAS*, vol. 281, pp. 27–47, Juuli 1996.
- [10] M. Bradač, S. W. Allen, T. Treu, H. Ebeling, R. Massey, R. G. Morris, A. von der Linden, ja D. Applegate, “Revealing the Properties of Dark Matter in the Merging Cluster MACS J0025.4-1222,” *ApJ*, vol. 687, pp. 959–967, November 2008.

- [11] K. Abazajian, “Linear cosmological structure limits on warm dark matter,” *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 063513, 2006.
- [12] A. H. G. Peter, “Dark Matter: A Brief Review,” *ArXiv e-prints*, Jaanuar 2012.
- [13] P. G. Ferreira, C. T. Hill, ja G. G. Ross, “Scale-Independent Inflation and Hierarchy Generation,” *Phys. Lett.*, vol. B763, pp. 174–178, 2016.
- [14] K. Kannike, G. Hütsi, L. Pizza, A. Racioppi, M. Raidal, A. Salvio, ja A. Strumia, “Dynamically Induced Planck Scale and Inflation,” *JHEP*, vol. 05, p. 065, 2015.
- [15] K. Kannike, M. Raidal, C. Spethmann, ja H. Veermäe, “The evolving Planck mass in classically scale-invariant theories,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 4, p. 26, Aprill 2017.
- [16] S. S. Mishra, V. Sahni, ja Y. Shtanov, “Sourcing Dark Matter and Dark Energy from α -attractors,” 2017.
- [17] L. Alexander-Nunneley ja A. Pilaftsis, “The minimal scale invariant extension of the Standard Model,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 9, p. 21, September 2010.
- [18] Y. Fujii ja K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press, 2007.
- [19] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,” *Phys. Rev.*, vol. D23, pp. 347–356, 1981.
- [20] J. Rubio ja C. Wetterich, “Emergent scale symmetry: connecting inflation and dark energy,” 2017.
- [21] J. Foster ja J. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*. Longman Mathematical Texts, Longman, 1979.
- [22] D. Baumann, “Inflation,” in *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, pp. 523–686, 2011.
- [23] D. I. Kaiser, “Conformal Transformations with Multiple Scalar Fields,” *Phys. Rev.*, vol. D81, p. 084044, 2010.
- [24] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.
- [25] D. I. Santiago ja A. S. Silbergleit, “On the energy momentum tensor of the scalar field in scalar tensor theories of gravity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 32, pp. 565–581, 2000.

- [26] S. Coleman ja E. Weinberg, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,” *Phys. Rev. D*, vol. 7, pp. 1888–1910, Mar 1973.
- [27] J.-F. Fortin, B. Grinstein, ja A. Stergiou, “Scale without Conformal Invariance: Theoretical Foundations,” *JHEP*, vol. 07, p. 025, 2012.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Andres Pöldaru,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Skalaarse tumeaine teke skaalainvariantsetes mudelites,

mille juhendajad on Hardi Veermäe ja Laur Järv,

- (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 26. mai 2017. a.